



Градска школа физике ФИЗНИШ
Пројекат Друштва физичара Ниш који финансира
Град Ниш



Obrada rezultata merenja

Pavlović Vladan

Plan predavanja

- Merenje
- Rezultat merenja
- Vrste grešaka
- Greške merenja i njihovo izračunavanje
 - sistematska greška
 - slučajna greška
- Zaokruživanje
- Direktno i indirektno merene veličine
- Linearizacija funkcija
- Crtanje grafika

Merenje

- Merenje je procedura kojom se fizičkoj veličini pridružuje brojna vrednost.
- Merenje:
 - Eksperiment
 - Simulacija
- Rezultat merenja UVEK je u obliku:

$$(rezultat \pm greska) [\text{merna jedinica}]$$

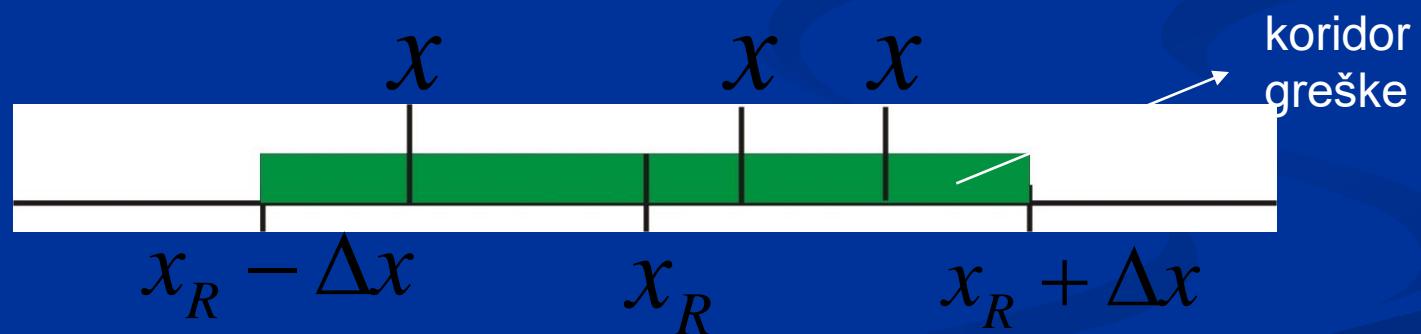
Rezultat merenja

- Rezultat merenja predstavljen u obliku:

$$(rezultat \pm greska) [\text{merna jedinica}]$$

znači da se prava vrednost merene fizičke veličine nalazi u intervalu:

$$\text{prava vrednost} = [rezultat - greska, rezultat + greska]$$



Obrada rezultata merenja

Tačna (prava) vrednost merene vrednosti se ne može tačno odrediti.

Najbolja ocena prave vrednosti fizičke veličine je srednja vrednost:

Srednja vrednost merenja

$$\bar{x} = \langle x \rangle = x_{sr} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^n x_i$$

n – broj merenja

x_1, x_2, \dots, x_n – vrednost izmerenih velicina

Vrste grešaka

Omaške

Greške nastale nepažnjom eksperimentatora ili njegovog nerazumevanja fizičkog procesa u toku eksperimenta.

Najčešće omaške:

1. pogrešno podešavanje i očitavanje instrumenata;
2. pogrešno upisivanje i prepisivanje podataka;
3. omaške u jedinicama mere, u računanju ili pogrešno zaključivanje
(Mars Climate Orbiter 1998)

Sistematske greške

Greške koje se ponavljanjem eksperimenta ne mogu smanjiti i teško se detektuju, jer ne dovode do rasipanja merene veličine.

Najčešće sistematske greške:

1. konstruktivne nepravilnosti u aparatima (loša aparatura);
2. neodržavanje konstantnosti eksperimentalnih uslova u toku merenja ili prilikom ponavljanja merenja
3. netačna vrednost upotrebljenih fizičkih konstanti

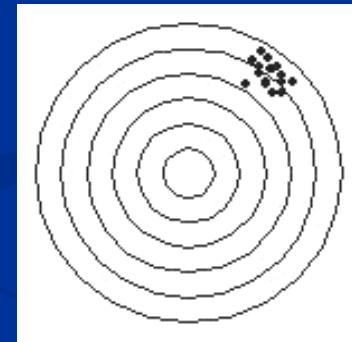
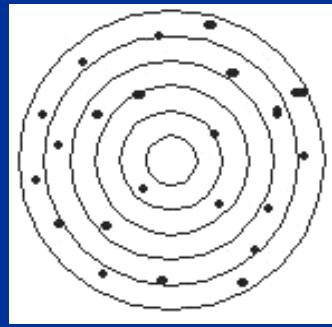
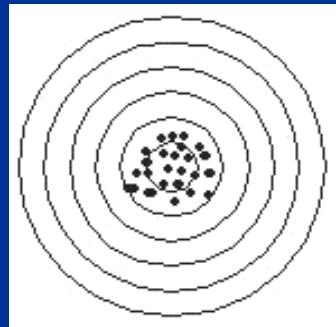
Slučajne greške

Greške predstavljaju razliku između vrednosti nekog pojedinačnog merenja i "najbolje" vrednosti dobijene iz više merenja.

Mogu se podvesti pod zakone matematičke statistike. Uzrok pojave slučajnih grešaka je probabilistički karakter fizičkih zakona u širem smislu (fizička veličina se pod istim uslovima uvek isto ponaša, fizički zakoni).

Vrste grešaka

- **Tačnost i preciznost**
- Tačnost označava koliko je rezultat merenja blizu “prave” vrednosti, meri se apsolutnom i relativnom greškom.
- Preciznost označava koliko je rezultat merenja blizu vrednostima koje se dobijaju ponavljanjem merenja na isti način (nema veze sa pravom vrednoću).



- **Tačnost** – sistematska greška
- **Preciznost** – slučajna (standardna greška)

Sistematska greška

- Sistematske greške su najčešće naznačene na samim uređajima:
 - klasa tačnosti instrumenta, koja je naznačena na instrumentu u procentima:

$$k_t = \frac{\Delta x}{x_{\max}} \cdot 100$$

- ukoliko nije naznačena klasa tačnosti, onda se za grešku uzima vrednost polovina najmanjeg podeoka instrumenta:

$$\Delta x = \frac{1}{2} C$$

Slučajna greška

Apsolutna greška predstavlja odstupanje od srednje vrednosti koje definiše interval u kome se nalazi prava vrednost fizičke veličine. Ima iste jedinice kao srednja vrednost merenja. U zavisnosti od broja merenja računa se na različite načine:

1) ukoliko je broj mernih uzoraka manji od 6, onda je absolutna (slučajna) greška jednaka maksimalnoj razlici izmerene veličine i srednje vrednosti:

$$n < 6 \quad \Delta x = \max |x_i - \bar{x}|$$

2) ukoliko je broj mernih uzoraka veći od 6, onda se absolutna (slučajna) greška računa preko standardne devijacije relacijom:

$$n \geq 6 \quad \sigma(x) = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Relativna greška predstavlja odnos izmedju absolutne greške i srednje vrednosti merenja. Najčešće se izražava u procentima jer pokazuje tačnost merene veličine.

$$\delta = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}} = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

Rezultat merenja

- Ukupna greška je zbir sistematske i slučajne greške:

$$greska = sistematska\ greska + slučajna\ greska$$

- Pa se krajnji rezultat merenja izražava u obliku:

$$(rezultat \pm greska) [merna\ jedinica]$$

$$(rezultat \pm \{sistematska\ greska + slučajna\ greska\}) [merna\ jedinica]$$

- Naravno, u slučaju samo jednog merenja slučajna greška se NE računa, pa je sistematska greška ujedno i ukupna.

Zaokruživanje

- Pravilo: Rezultat merenja mora imati onoliko cifara koliko ima greška.
- Pravilno zaokruživanje grešaka:
 - greška može imati najviše jednu ili dve cifre različite od nule
 - greška se uvek zaokružuje na veći broj (ne važe zakoni kod decimalnog zaokruživanja)

Primer:

$$\Delta x = 0.00245897 \text{ m}$$

$$\Delta x = 0.00125897 \text{ m}$$

$$\Delta x = 0.003 \text{ m}$$

$$\Delta x = 0.0013 \text{ m}$$

Zaokruživanje

- Pravilo: Rezultat merenja mora imati onoliko cifara koliko ima greška.
- Pravilno zaokruživanje rezultata merenja:
 - rezultat merenja se zaokružuje prema matematičkim zakonima decimalnih brojeva:
 - ako je prva cifra koju treba ukloniti između **0** i **4** sve cifre se odbacuju
 - ako je prva cifra koju treba ukloniti između **6** i **9** poslednja cifra se uvećava za **1**
 - ako je prva cifra koju treba ukloniti **5**, a iza nje ima još cifara različitih od nule, tada se poslednja cifra uvećava za **1**
 - ako je prva cifra koju treba ukloniti **5**, a iza nje nema više cifara ili su nule, obično se poslednja cifra koja ostaje uvećava za **1** ako je neparna, a ne menja ako je parna

Zaokruživanje

Primeri:

$$\begin{array}{l} x = 1.234567 \text{ m} \\ \Delta x = 0.004567 \text{ m} \end{array} \xrightarrow{\text{I korak}} \begin{array}{l} x = 1.234567 \text{ m} \\ \Delta x = 0.005 \text{ m} \end{array} \xrightarrow{\text{II korak}} \begin{array}{l} x = 1.235 \text{ m} \\ \Delta x = 0.005 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 0.04575 \text{ m} \\ \Delta x = 0.001456 \text{ m} \end{array} \xrightarrow{\text{I korak}} \begin{array}{l} x = 0.04575 \text{ m} \\ \Delta x = 0.0015 \text{ m} \end{array} \xrightarrow{\text{II korak}} \begin{array}{l} x = 0.0458 \text{ m} \\ \Delta x = 0.0015 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 13.2323 \text{ m} \\ \Delta x = 0.23467 \text{ m} \end{array} \xrightarrow{\text{I korak}} \begin{array}{l} x = 13.2323 \text{ m} \\ \Delta x = 0.3 \text{ m} \end{array} \xrightarrow{\text{II korak}} \begin{array}{l} x = 13.2 \text{ m} \\ \Delta x = 0.3 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 3467664 \text{ m} \\ \Delta x = 2346 \text{ m} \end{array} \xrightarrow{\text{I korak}} \begin{array}{l} x = 3467664 \text{ m} \\ \Delta x = 3000 \text{ m} \end{array} \xrightarrow{\text{II korak}} \begin{array}{l} x = 3468000 \text{ m} \\ \Delta x = 3000 \text{ m} \end{array}$$

$$x = (3.468 \pm 0.003) \cdot 10^6 \text{ m}$$

Greške indirektno merenih veličina

- Direktno merene veličine su veličine čije vrednosti možemo očitati sa instrumenata, dok su indirektno merene veličine one koje računamo korišćenjem fizičkih zakona, a koje ne možemo eksperimentalno meriti npr:

$$U = IR$$

$$v = \frac{s}{t}$$

Greške indirektno merenih veličina

- Sistematske greške ovih veličina se računaju na osnovu sistematskih grešaka direkto merenih veličina i to prema relaciji:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i$$

- Slučajne greške ovih veličina se računaju na osnovu slučajnih grešaka direkto merenih veličina i to prema relaciji:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

Primeri:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

$$U = IR \quad \rightarrow \quad \Delta U = \left| \frac{\partial(U)}{\partial I} \right| \cdot \Delta I + \left| \frac{\partial(U)}{\partial R} \right| \cdot \Delta R \quad \rightarrow \quad \Delta U = R \cdot \Delta I + I \cdot \Delta R$$

$$v = \frac{s}{t} \quad \rightarrow \quad \Delta v = \left| \frac{\partial \left(\frac{s}{t} \right)}{\partial s} \right| \cdot \Delta s + \left| \frac{\partial \left(\frac{s}{t} \right)}{\partial t} \right| \cdot \Delta t \quad \rightarrow \quad \Delta v = \frac{\Delta s}{t} + \frac{s}{t^2} \cdot \Delta t$$

$$s = v \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \rightarrow \quad \Delta s = \left| \frac{\partial \left(v \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \right)}{\partial v} \right| \cdot \Delta v + \left| \frac{\partial \left(v \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \right)}{\partial t} \right| \cdot \Delta t + \left| \frac{\partial \left(v \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \right)}{\partial a} \right| \cdot \Delta a$$

$$\rightarrow \quad \Delta s = t \cdot \Delta v + (v + a \cdot t) \cdot \Delta t + \frac{t^2}{2} \cdot \Delta a$$

Grafičko prikazivanje rezultata

- Grafičko prikazivanje rezultata se koristi ukoliko je potrebno odrediti funkcionalnu zavisnost izmedju dve ili više promenljivih.
- Pored funkcionalne zavisnosti često je potrebno odrediti i parametre te zavisnosti.
- Pre crtanja grafika, potrebno je izvršiti linearizaciju funkcije koja se predstavlja, odnosno treba tako srediti promenljive da se dobije linearna funkcija oblika:

$$y = kx + n$$

Linearizacija funkcija

$$s = vt$$

A diagram illustrating the linear function $s = vt$. The equation is enclosed in a light orange box. Arrows point from the variable y to the term vt and from the variable x to the term vt . Below the box, the letter k is enclosed in a light orange box.

$$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

A diagram illustrating the quadratic function $s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2$. The equation is enclosed in a light orange box. Arrows point from the variable y to the term $v_0 t$, from the variable n to the term $\frac{a}{2} t^2$, and from the variable x to the term $v_0 t$. Below the box, the letter k is enclosed in a light orange box.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \longrightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{mgd} \longrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 I}{mg} \frac{1}{d}$$

A diagram illustrating the derivation of the formula for the period of a simple pendulum. It shows three equations connected by arrows. The first equation is $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$, the second is $T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{mgd}$, and the third is $T^2 = \frac{4\pi^2 I}{mg} \frac{1}{d}$. The variable y is associated with the first equation, and the variable k is associated with the third equation.

k – koeficijent pravca

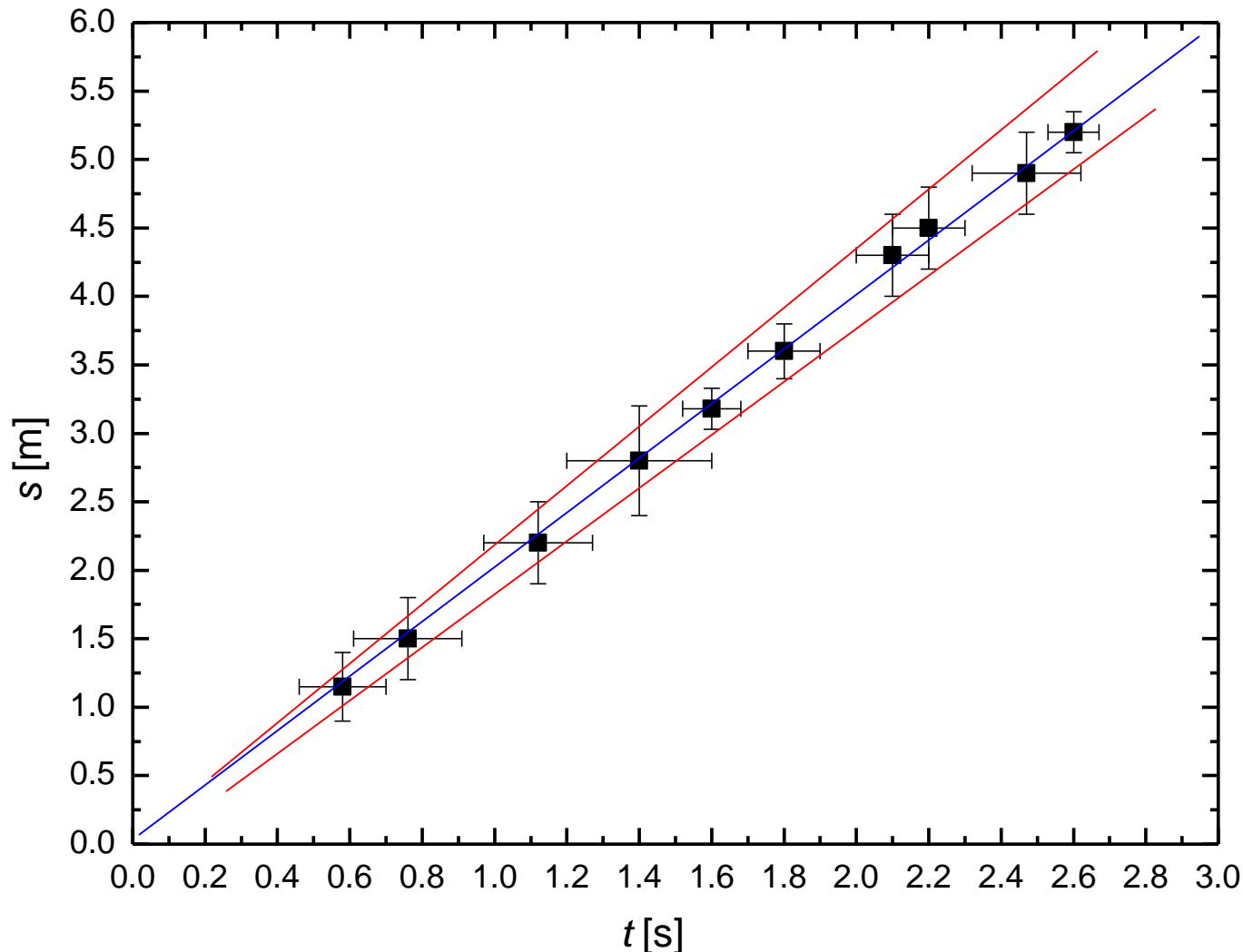
n – odsekak na y osi

Crtanje grafika

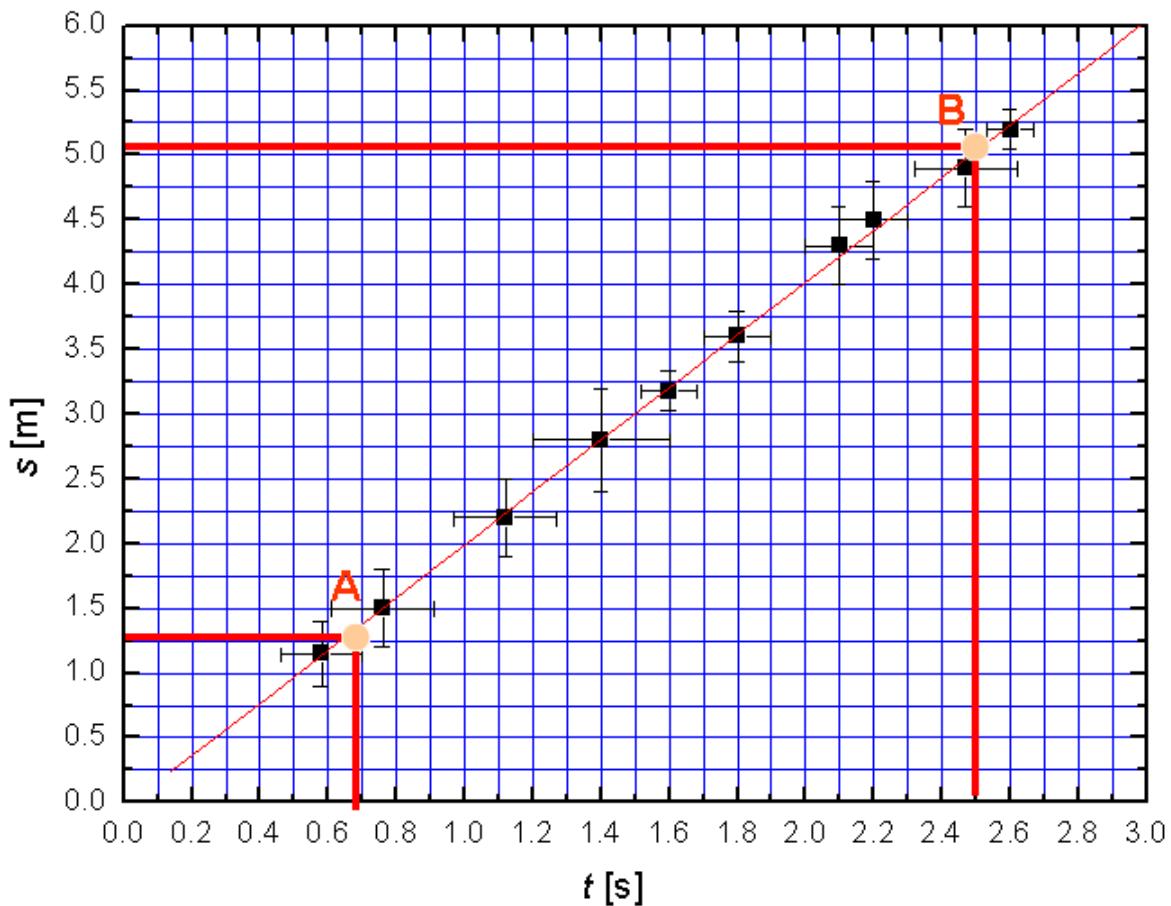
- Najčešće na milimetarskoj hartiji sa linearnom podelom
(postoje i: lin-log, log-log...)
- Veličina grafika – iskoristiti što veći deo hartije...
- Dozvoljene vrednosti podeoka (1,2,5,10), (4?)
- Na osama – naznačiti veličinu i jedinicu
(jedinice se navode u zagradi pored simbola veličine)
- Ispisati brojnu skalu
(cele, a ne izmerene vrednosti)
- Dati naziv grafiku
- Ucrtati greške na grafik

Crtanje grafika

Zavisnost predjenog puta od vremena



Odredjivanje koeficijenta pravca



$$A(x_A, y_A)$$
$$B(x_B, y_B)$$

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Određivanje koeficijenta pravca

- Konačna relacija greške koeficijenta pravca ima oblik:

$$\Delta k = \left(\frac{\Delta x_{A_{\max}} + \Delta x_{B_{\max}}}{x_B - x_A} + \frac{\Delta y_{A_{\max}} + \Delta y_{B_{\max}}}{y_B - y_A} \right) \cdot k$$

- Za grešku očitanih vrednosti uzima se veća od grešaka dve susedne tačke.

Pitanja?