



Градска школа физике ФИЗНИШ
Пројекат Друштва физичара Ниш који финансира Град Ниш



Sabiranje međusobno normalnih oscilacija. Lisažuove figure

Razmotrimo situaciju koja nastaje kada na x- i y-kanal osciloskopa dovedemo naizmenične, sinusne napone istih frekvencija a različitih faza i amplituda. Na osnovu prethodnih razmatranja, vremenski promenljive napone opisujemo sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned}U_x(t) &= U_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\U_y(t) &= U_2 \cos(\omega t + \varphi_2),\end{aligned}\quad (1)$$

Pod dejstvom ovakvih napona, elektronski mlaz će na ekranu osciloskopa oscilovati u x- i y- pravcu, a odgovarajuća pomeranja mlaza iz koordinatnog početka se mogu izraziti u obliku:

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi_1) \\y(t) &= B \cos(\omega t + \varphi_2),\end{aligned}\quad (2)$$

gde su A i B amplitude ovih oscilacija. Da bi odredili jednačinu traektorije po kojoj će se kretati elektronski mlaz na ekranu osciloskopa (u x-y ravni), iz jednačina (2) treba eliminisati vreme. Deljenjem prve jednačine sa A, druge sa B i uz korišćenje trigonometrijskog identiteta dobijamo:

$$\begin{aligned}\frac{x}{A} &= \cos(\omega t) \cos(\varphi_1) - \sin(\omega t) \sin(\varphi_1) \\ \frac{y}{B} &= \cos(\omega t) \cos(\varphi_2) - \sin(\omega t) \sin(\varphi_2).\end{aligned}\quad (3)$$

Množenjem prve jednačine u sistemu (3) sa $\sin \varphi_2$ a druge sa $\sin \varphi_1$ i oduzimanjem druge od prve, koristeći trigonometrijsku formulu za $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$, dobijamo:

$$\frac{x}{A} \sin \varphi_2 - \frac{y}{B} \sin \varphi_1 = \cos \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1),\quad (4)$$

Zatim prvu jednačinu u (3) množimo sa $\cos \varphi_2$ a drugu sa $\cos \varphi_1$, oduzimamo drugu od prve i dobijamo:

$$\frac{x}{A} \cos \varphi_2 - \frac{y}{B} \cos \varphi_1 = \sin \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1).\quad (5)$$

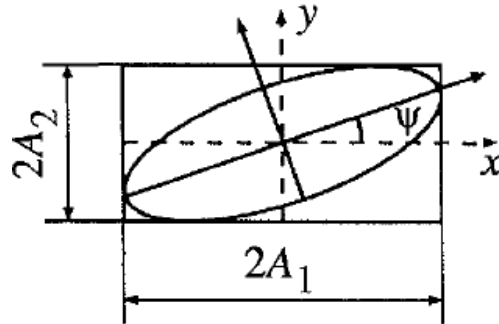
Kvadriranjem jednačina (4) i (5), uz vezu $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, dobijamo konačno jednačinu trajektorije koju opisuje elektronski mlaz na ekranu osciloskopa:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).\quad (6)$$

Jednačin (6) predstavlja elipsu, upisanu u pravougaonik stranica A i B, koji se nalazu ravni ekrana (slika 1). Elipsa dodiruje stranice kvadrata u tačkama $(\pm A, \pm B \cos \varphi)$ i $(\pm A \cos \varphi, \pm B)$, gde je $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. U opštem slučaju, ose elipse nisu u Ox i Oy pravcu, već zaklapaju neki ugao ψ sa njim. Može se pokazati da za taj ugao važi relacija:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2AB}{A^2 - B^2} \cos \varphi,$$

što u slučaju napona jednakih amplituda ($A = B$) daje vrednost $\psi = \pi/4$.



Slika 1. Trajektorija elektronskog mlaza u slučaju napona istih frekvencija i fazne razlike φ .

Trajektorije u slučaju karakterističnih početnih faznih razlika

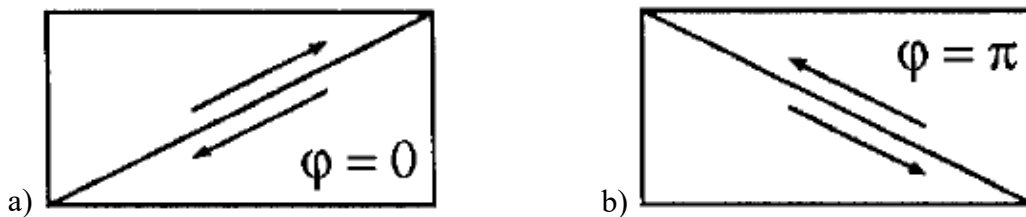
Dva tipa trajektorija su od posebne važnosti, kad elipsa prelazi u pravu liniju i kružnicu. Na osnovu jednačine (6), elipsa će preći u pravu liniju kada važi:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

tada je:

$$\frac{y}{x} = (-1)^m \frac{B}{A}. \quad (7)$$

Prava data jednačinom (7) će se nalaziti u I i III kvadrantu koordinatnog sistema za $m=0$ i pri parnim vrednostima m , a u II i IV kvadrantu pri neparnim vrednostima m (Slika 2).



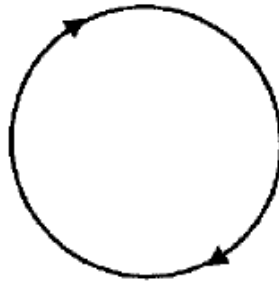
Slika 2. Linearno polarizovan talas: a) I i III kvadrant, b) II i IV kvadrant.

Drugi važan slučaj je kada elipsa data jednačinom (6) prelazi u kružnicu. Uslov da pravougaonik u kome je opisana elipsa pređe u kvadrat je jednakost amplituda oba napona, tj. $A = B = R$. Takođe, fazna razlika između primenjenih napona mora biti jednaka:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = m\frac{\pi}{2}, \quad (m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots),$$

na osnovu koga jednačina (6) prelazi u jednačinu kružnice:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (59)$$



Slika 3. Trajektorija u obliku kružnice

U opštem slučaju, u zavisnosti od odnosa frekvencija primenjenih napona, na ekranu osciloskopa će se dobiti linije koje su poznate kao Lisažuove figure.

Opis eksperimenta i zadaci

Sistem na kome se proučava slaganje međusobno normalnih električnih oscilacija se sastoji od analognog osciloskopa i dva generatora napona promenljivih frekvencija. Na jednom generatoru se frekvencija primenjenog napona može odabrati na regulatoru, a na drugom je regulator zaklonjen, na određenim mestima stoje samo velika slova abecede. Izlazi iz generatora se priključuju na ulazne kanale osciloskopa, a amplitude skretanja po x- i y-osi se prilagođavaju promenom amplituda ulaznih napona. Izbor vremenske i naponskih skala na osciloskopu (vrednost koju nosi podeok) treba izvršiti tako da se na ekranu dobija jasna slika.

Zadatak 1.

Uključujući samo jedan generator naizmennog napona (generator 1), odrediti njegovu frekvenciju i amplitudu. Dobijeni rezultat napisati u obliku datom izrazom (1).

Zadatak 2.

Koristeći oba generatora naizmennog napona i pretpostavku da će se u slučaju jednakih frekvencija dobiti neka od karakterističnih trajektorija, odrediti frekvencije koje odgovaraju slovima na generatoru 2.

Zadatak 3.

Za različite odnose frekvencija napona koji se dovode na x- i y-osu, iscrtati Lisažuove figure koje se dobijaju na ekranu osciloskopa. Preporučeno odnosu frekvencija:

$$\omega_x : \omega_y = 1:1, 1:2, 1:3, 1:4, 2:1, 3:1, \dots$$