Анализа осциловања математичког клатна, одређивање убрзања Земљине теже

Математичко клатно је идеализовани случај физичког клатна. Самим тим, у лабораторији се среће мање или више добар модел (апроксимација) математичког клатна. Математичко клатно подразумева да се тачкаста маса налази на крају неистегљиве и несавитљиве нити бесконачно мале дебљине, прикачене на ослонац. Претпоставка је да оно врши просте хармонијске осцилације уз занемарљиво трење у тачки вешања и занемарљиви отпор ваздуха.

Клатно се креће малим делом кружнице под дејством момента:

$$M = -mg\ell \sin\varphi .$$

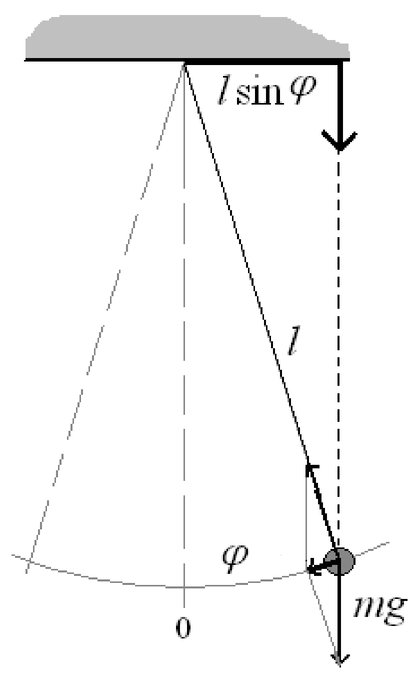
Његов момент инерције је: $I = m\ell^2$. Када клатно осцилује са малим одступањима од равнотежног положаја, угао φ је мали па важи да је приближно: $m\ell^2\ddot{\varphi} = -mg\ell\sin\varphi \cong -mg\ell\varphi$.

Након сређивања, једначина осциловања постаје:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0 .$$

Решење ове једначине је синусна функција са кружном фреквенцијом:

$$g/\ell = \omega_o{}^2 = \left(2\pi/\tau\right)^2 .$$



Слика 8.5. Математичко клатно.

Одавде је период осциловања:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} .$$

Следи интересантан закључак да период осциловања оваквог клатна не зависи од масе већ само од његове дужине и вредности константе убрзања g. Отуда, ако су познати период осциловања и дужина математичког клатна, могуће је одредити вредност Земљиног убрзања g . Најбоља апроксимација тела тачкасте масе је метална куглица, довољне масе да обезбеди сталну затегнутост нити а истовремено је и отпор средине њеном кретању максимално смањен.

Оглед почиње мерењем дужине клатна ℓ, од тачке ослонца до средине металне куглице, односно до њеног тежишта. Овај се податак уноси у одговарајућу табелу. Затим треба одредити период осциловања. Ако се време мери ручним хронометром, готово су неизбежне грешке мерења које нису занемарљиве. Да би се умањио значај ових грешака, прибегава се мерењу времена t_n већег броја осцилација (n = 30-50). Амплитуда осциловања притом, треба да је што мања (неколико cm), јер такво осциловање више одговара постављеном моделу. Одатле се период осциловања налази као:

$$\tau = \frac{t_n}{n}.$$

Измерена времена и израчунате вредности периода осциловања се такође уносе у табелу. Оглед се изводи за неколико (5-10) различитих дужина клатна, при чему треба бирати веће дужине јер се показало да је примењена апроксимација боља. Могућа организација табеле је приказана у наставку.

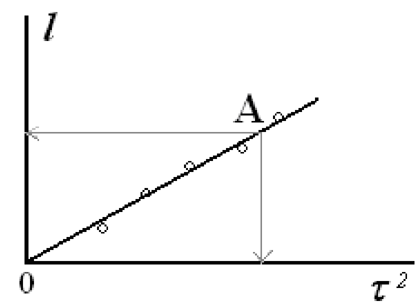
l	n	t_n	τ	τ^2	g	$\bar{g}$	Δg

Уколико се ради са већим бројем дужина (8 и више), могу се појединачно израчунавати вредности за g, а затим аналитички одредити средња вредност и проценити грешка мерења (стандардна девијација) према уобичајеној процедури.

Други приступ је да се на основу измерених и израчунатих вредности нацрта график зависности квадрата периода осциловања од дужине клатна. Како је ова зависност линеарна, $l = \frac{g}{4\pi^2} \cdot \tau^2$ то се може применити линеарна апроксимација.

У ту сврху се изабере једна тачка са праве (која није мерена тачка, A) и на основу вредности дужине и квадрата периода осциловања који јој одговарају, може се израчунати вредност убрзања силе земљине теже:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{\tau^2} = 4\pi^2 \frac{l(A)}{\tau^2(A)}.$$



Слика 8.6. Очекивана зависност $l = f(\tau^2)$.

На основу процењене грешке мерења дужине и времена, може се на крају проценити и укупна грешка, на овај начин одређене вредности убрзања земљине теже:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta\tau}{\tau} .$$