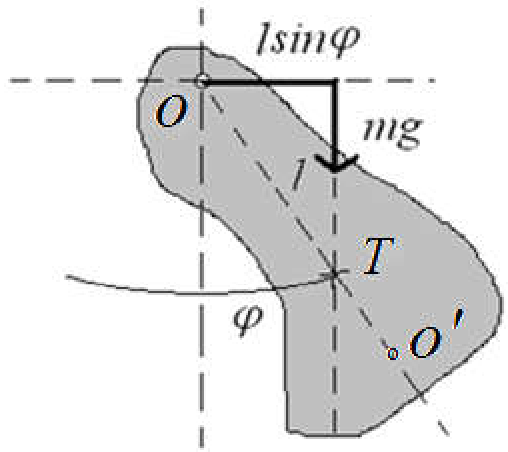
Анализа осциловања физичког клатна

Физичко клатно је свако тело које осцилује око равнотежног положаја, при чему се осциловање врши у односу на тачку ослонца. При том се његово тежиште налази на неком одстојању l од тачке ослонца.



Слика 8.9. Физичко клатно.

Осциловање физичког клатна настаје деловањем момента $mg \cdot l \sin\varphi$. Овакво осциловање се може посматрати и као део кружног кретања при чему тело стално мења правац и брзину ротације. Стално је дакле присутно и угаоно убрзање. Овом убрзању се тело опире својим моментом инерције (који се стандардно означава I). Имајући ово у виду може се саставити диференцијална једначинакојом се описује овакво осциловање:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \cdot \varphi = 0 \,.$$

У последњем изразу са I је означен момент инерције тела, а са φ, угао отклона. Решење ове једначине је периодочна функција са кружном фреквенцом

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I} \,.$$

Како је по дефиницији $\omega = {}^{2\pi}\!/_{\tau}$, то следи да је период осциловања:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} .$$

У школским и студентским лабораторијама се обично срећу два вида физичког клатна. То су: летва са отворима и летва са теговима.

8.3.1. Летва са отворима

Као физичко клатно може послужити дрвена летва са периодично урезаним отворима. У овом случају тежиште је на истом месту током целог експеримента. Отвори служе да се летва монтира на ослонац, који треба да омогући неометано осциловање.

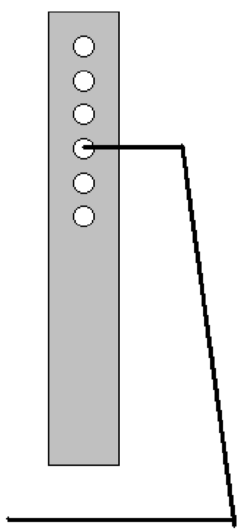
Мерење започиње тако што се измери маса летве m и одреди положај тежишта.

Затим се измери растојање од тежишта до изабране тачке ослонца ℓ. (Ослонац или тачка вешања ће увек бити горња ивица отвора на летви.)

Период осциловања клатна за изабрану тачку ослонца се одређује тако што се тело пусти да осцилује. Измери се време t за које тело изврши већи број пуних осцилација n (20 до 50) и одатле одреди период осциловања: $\tau = {}^{t_n}\!/_{n}$.

На основу приказане зависности, сада се може одредити момент инерције тела.

$$I = mgl\frac{\tau^2}{4\pi^2} .$$



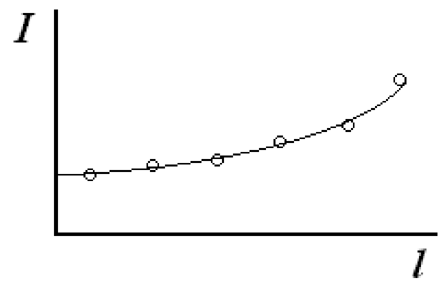
Сл. 8.10. Летва са отворима.

Треба имати у виду да је овде одређен момент инерције у односу на задану тачку ослонца. Он ће имати другу вредност за другу тачку ослонца (и друго одстојање тежишта). Мерења треба обавити за већи број тачака ослонца. Измерене вредности се уносе у табелу облика:

Радна табела

бр.	n	t_n	τ	m	ℓ	ℓ^2	I
1							
2							

Резултати овог истраживање се могу приказати графички као зависност измереног периода осциловања од одстојања тежишта клатна $\tau = f(l)$ и зависност момента инерције од одстојања тежишта $I = f(l)$. Очекивани ток зависности $I = f(l)$ је приказан на наредној слици.



Слика 8.11. Очекивани пораст момента инерције са порастом одстојања тежишта.

Сопствени момент инерције у односу на одговарајућу слободну осу која пролази кроз тежиште I_o може се одредити са графика имајући у виду Штајнерову теорему: $I = I_o + m\ell^2$.

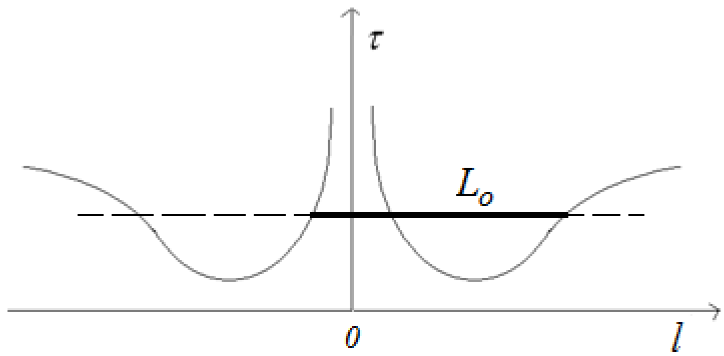
Ток зависности периода осциловања $\tau = f(l)$ се може предвидети изразом:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o + ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mgl} + \frac{l}{g}}\ .$$

За мало l (када l тежи нули), други сабирак тежи нули а први расте ка бесконачности. Дакле, период осциловања расте. Са друге стране, када је l велико, први сабирак има све мањи значај (тежи нули), па ће ово клатно осциловати попут математичког, а период осциловања расте. Да би се добио бољи увид у токове ових зависности, потребно је узети што већи опсег одстојања тежишта летве од ослонца (l).

Симетрија

Летва коју користимо је геометријски правилна и хомогена па ће се тежиште налазити у њеној геометријској средини. Тако ће бити свеједно коју њену страну смо изабрали да буде ближе тачки вешања (ослонцу). Закључујемо да ће иста зависност уследити и за њену другу страну а графички приказ симетричан у односу на одстојање тежишта од тачке вешања. Ово је приказано на наредној слици.



Слика 8.12. Очекивани ток зависности периода осциловања од одстојања тежишта од тачке вешања.

Редукована дужина физичког клатна

Посматрањем израза којим се одређује период осциловања математичког и физичког клатна може се уочити аналогија која при неким условима може прерасти у једнакост. Тако је у случају математичког клатна:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ док је у случају физичког: } \tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

Очекује се да увек постоји математичко клатно чија је дужина таква да је његов период осциловања једнак периоду осциловања физичког клатна. Ова два клатна ће на тај начин постати синхрона. Дужина математичког клатна ће у овом случају имати посебну вредност, која се назива редукованом дужином физичког клатна а означава се са L_o. У том случају ће важити:

$$2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_o}{g}},$$

одакле је: $L_o = \frac{I}{ml}$. Како је $I = I_o + ml^2$, то је $L_o = \frac{I_o + ml^2}{ml} = \frac{I_o}{ml} + l$. Ово показује да је L_o увек веће од актуелног одстојања l (осим у граничном случају када одстојање тежишта тежи бесконачности, када ове величине постају једнаке).

Код физичког клатна се може наћи још једна важна тачка o' када се растојање L_o нанесе на праву која спаја тачку вешања и тежиште тела тако да један крај одговара тачци вешања. Други крај ове дужине ће дефинисати тачку o'. Може се показати да ће исто тело окачено за њу имати исти период осциловања какав је имало и раније док је било окачено у тачци o. Дакле да је неко ново $\tau' = \tau$.

Претпоставимо да тело са тачком вешања у тачци o' има момент инерције I', период осциловања τ' и одстојање тежишта l'. Према уведеним ознакама и назначеним релацијама биће:

$$\tau' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{mgl'}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o + m(L_o - l)^2}{mg(L_o - l)}} = 2\pi\sqrt{\frac{I - ml^2 + m(L_o - l)^2}{mg(L_o - l)}}\ .$$

Израз којим се одређује нови момент инерције се може даље трансформисати као:

$$I' = I + mL_o(L_o - 2l) = \frac{I \cdot l}{l} + m\frac{I}{ml}(L_o - 2l) = \frac{I}{l}(L_o - l).$$

Тако је:

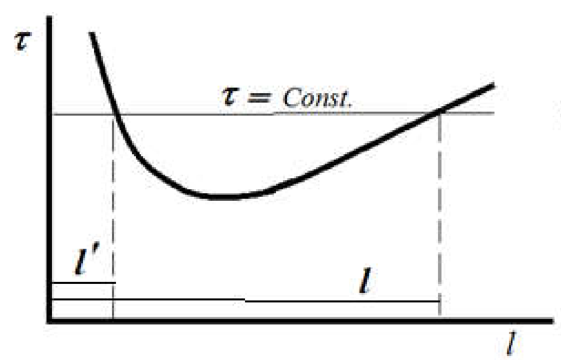
$$\tau' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{mgl'}} = 2\pi\sqrt{\frac{I(L_o - l)}{mgl(L_o - l)}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = \tau\ .$$

Одређивање убрзања Земљине теже

Ово сазнање нам омогућава да коришћењем физичког клатна одредимо убрзање силе Земљине теже. Ако можемо да измеримо растојање L_o и период осциловања који му одговара, убрзање силе Земљине теже можемо да одредимо користећи израз за период осциловања математичког клатна и све то без одређивања масе или момента инерције клатна.

Да би то остварили треба да пронађемо две тачке на графику које имају исти период осциловања али су са разних страна у односу на тежиште летве. Видимо на графику приказаном на слици 8.9. да права која испуњава услов једнаких периода пресеца експерименталну криву у четири тачке. Постављени услов испуњавају тачке са исте стране у односу на два регистрована минимума ове зависности.

Обзиром да је график симетричан у односу на позицију тежишта, то се ови подаци могу добити и мерењем ове зависности само на једној страни клатна. Ово је приказано на наредној слици.



Слика 8.13. одређивање редуковане дужине, $L_o = l + l'$.

По претпоставци убрзање силе Земљине теже се може израчунати користећи релацију:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L_o}{g}}\text{, одакле је: } g = 4\pi^2\frac{L_o}{\tau^2}\ .$$